Prüfungsaufgaben
Mündliches Abitur

Analysis

Teilbereich 5:

Exponential Funktionen 1

Grundkursniveau

Hier eine Musteraufgabe mit Lösung
Auf CD alles komplett

Datei Nr. 49151

Friedrich Buckel

Oktober 2003

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die in dieser Reihe von Dateien angebotenen Prüfungsaufgaben entstammen alle der Prüfungspraxis. Als Fachlehrer und Prüfungsvorsitzender habe ich über 30 Jahre hinweg Prüfungsaufgaben von Fachlehrern gesammelt und werte diese Sammlung nun aus.

Diese Aufgaben eignen sich auch vorzüglich der <u>Vorbereitung der schriftlichen Prüfungen</u>, denn in ihnen wird kompakt das Wichtigste besprochen.

Ich mache dabei selten Angaben, ob sie dem Grundkurs oder dem Leistungskurs zugeordnet werden sollen, denn es gibt einen großen Bereich, in dem sich die Themen überlappen. Außerdem hängt das Niveau einer Prüfung nicht nur vom Thema ab, sondern auch von der sich daran anschließenden Entwicklung der Prüfung, also den Zusatzfragen zur Methodik, zur Theorie, zu Anwendungen. Ich werde meistens noch eine oder mehrere mögliche Zusatzfragen anfügen.

Die angebotenen Lösungen sind nicht für alle Schüler gleichermaßen verwendbar, denn die Methodik ist natürlich auch davon abhängig, wie der Fachlehrer unterrichtet hat. Beispielsweise wenden nicht alle in der Vektorrechnung Determinantenverfahren an.

In den meisten Bundesländern ist eine zweigeteilte mündliche Prüfung von insgesamt 20 bis 30 Minuten Länge üblich. Im ersten Teil liegt dem Schüler eine Aufgabe vor, deren Text er im Vorbereitungszimmer bereits erhält. Er hat dann 10 bis 15 Minuten Zeit, die Lösung vorzutragen. Die zweite Hälfte der Prüfung geschieht dann in der Regel an einer unvorbereiteten, in der Prüfung gestellten Aufgabe.

Die hier angebotenen Aufgaben dienen der ersten Prüfungshälfte. Der Umfang von 10 bis 15 Minuten wird oft überschritten, denn es kommt auch darauf an, dass der Schüler flüssig vorträgt und den Lösungsweg kennt. Schwache Schüler kommen dann oft nicht weit und handeln dann nur Teile der Aufgabe ab.

Diese Sammlung an Prüfungsaufgaben wird kontinuierlich erweitert.

Ich verwende für alle quadratischen Gleichungen die allgemeine Lösungsformel, und nie die p-q-Formel. Sie lautet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

In den meisten Fällen kann man entsprechend die p-q-Formel anwenden. In einigen Fällen führt diese jedoch zu komplizierten Rechnungen.

Aufgabe (Exponentialfunktion 5)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-\frac{1}{2}x}$, K sei ihr Schaubild.

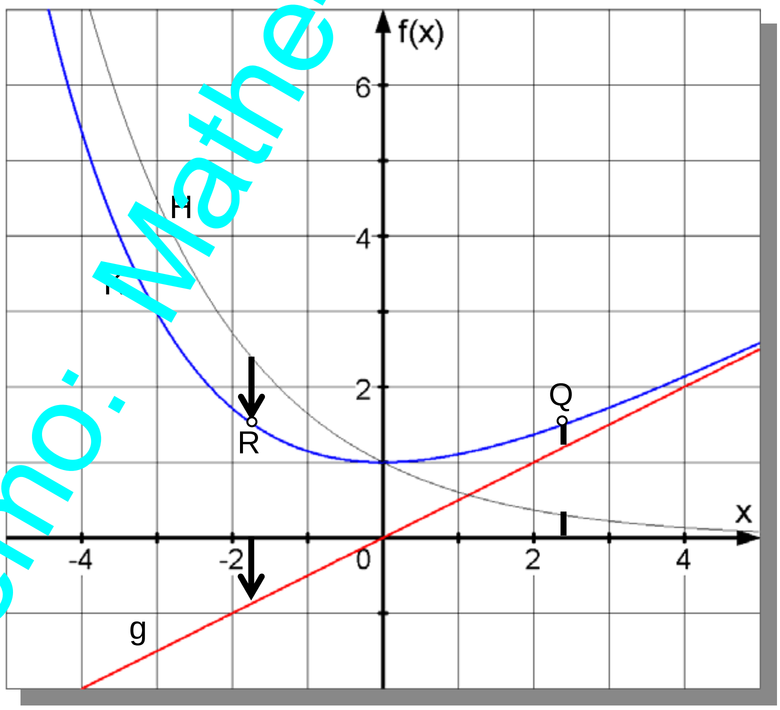
a) Skizziere K mittels Ordinatenaddition

b) Berechne den Extrempunkt von K.

c) K, ihre Asymptote, die y-Achse und die Gerade x = r (r > 0) begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(r).
Berechne $A^* = \lim\limits_{r \to \infty} A(r)$
In welchem Verhältnis teilt die Tangente im Extrempunkt diese Fläche A*?

d) Die Gerade x = u (u>0) schneidet K in P und die Asymptote in Q. Zeige, dass das Dreieck OPQ einen extremen Inhalt annehmen kann. Von welcher Art und wie groß ist er?

Diese Aufgabe ist zu umfangreich. Man wird d) oder c) auswählen.



a) Die Kurvengleichung
$$y = \frac{1}{2}x + e^{-\frac{1}{2}x}$$
kann man als „Summe“ der Gleichungen
$y = \frac{1}{2}x$ und $y = e^{-\frac{1}{2}x}$
interpretieren und das als Ordinatenaddition durchführen.

In der Abbildung ist dies an zwei Stellen gezeigt. Man zeichnet zuerst die Gerade g: $y = \frac{1}{2}x$ und dann die Hilfskurve H: $y = e^{-\frac{1}{2}x}$. Hierzu zeichnet man diese 5 Punkte ein:
$P_1(0\,|\,1)$; $P_2(2\,|\,e^{-1} \approx 0{,}4)$; $P_3(4\,|\,e^{-2} \approx 0{,}14)$; $P_4(-2\,|\,e \approx 2{,}72)$; $P_5(-4\,|\,e^{2} \approx 7{,}4)$.
Nun addiert man die Ordinaten (y-Koordinaten) an verschiedenen Stellen. Ein Beispiel ist rechts bei x = 2,3 eingezeichnet. Die Ordinate des H-Punktes wird zur Ordinate des g-Punktes addiert, so dass man einen Punkt Q von K (blaue Linie) erhält. Das nächste Beispiel ist links bei x = - 1,8 . Dort hat der g-Punkt eine negative y-Koordinate (weshalb ich auch einen nach unten zeigenden Pfeil eingezeichnet habe). Den trägt man vom darüber liegenden H-Punkt (nach unten) ab und kommt zu einem K-Punkt R.

g ist die **schiefe Asymptote** von K, denn: $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$.

b) $f(x)=\frac{1}{2}x+e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$f''(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$

Extremwertbedingung: *(Notwendige Bedingung)*

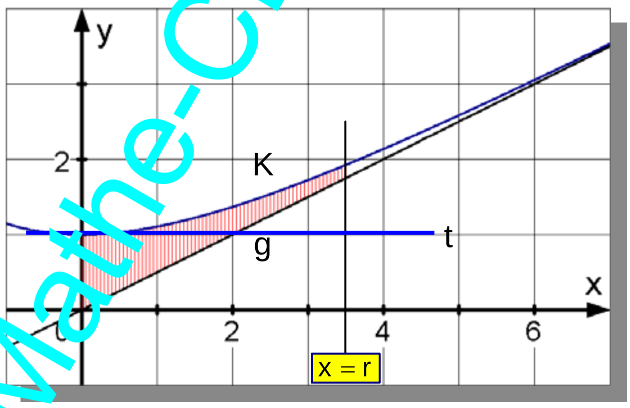
$f'(x_E)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=0 \Leftrightarrow x_E=0.$

Funktionswert: $f(0)=1$

Kontrollrechnung: *(Hinreichende Bedingung)*

$f''(0)=\frac{1}{4}>0$

Daher liegt bei $x = 0$ ein relatives Minimum vor, die Kurve K hat dort den Tiefpunkt $T(0|1)$.



c) $A(r)=\int_0^r (f(x)-g(x))dx$

$=\int_0^r \left(\frac{1}{2}x+e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^r e^{-\frac{1}{2}x}dx=$

$=\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^r=\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^r=-2e^{-\frac{1}{2}r}+2$

$A^*=\lim_{r\to\infty}A(r)=2$, denn $\lim_{r\to\infty}e^{-\frac{1}{2}r}=0$.

Die Tangente t im Tiefpunkt hat die Gleichung: $y = 1$.

Sie zerlegt die Fläche A^* in ein Dreieck A_1 und eine Restfläche A_2.

Berechnung der Dreiecksfläche A_1 :

Die Tangente $y = 1$ schneidet die Asymptote g: $y=\frac{1}{2}x$ in $S(2|1)$.
Also hat das Dreieck die Breite 2 und die Höhe 1:

$A_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$

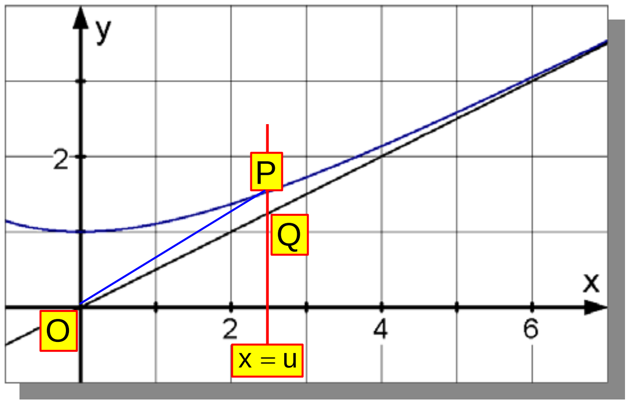
Restfläche $A_2=A^*-A_1=1$

Die Tangente t halbiert somit die Fläche A^*.

d) P sei ein beliebiger Kurvenpunkt: $P\left(u \mid f(u)\right)$

Q liegt auf der schiefen Asymptote: $Q\left(u \mid \frac{1}{2}u\right)$

Für den Dreiecksinhalt wählt man die Grundseite stets parallel zu einer der beiden Achsen.



Hier wählt man $\overline{PQ} = f(u) - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u + e^{-\frac{1}{2}u} - \frac{1}{2}u = e^{-\frac{1}{2}u}$

als Grundseite.

Die Höhe steht auf dieser Grundseite senkrecht, ist also u.

<u>Flächeninhalt</u>: $F(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}u} \cdot u = \frac{1}{2}u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$

Diese Flächeninhaltsfunktion hat den Definitionsbereich $D_u = \left]\,0\,;\infty\,\right[= \mathbb{R}^+$

Ableitungen mit der Produktregel:

$$F'(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}u} + \frac{1}{2}u \cdot e^{-\frac{1}{2}u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\left(1 - \frac{1}{2}u\right)$$

$$F''(u) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}\left(1 - \frac{1}{2}u\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Zusammenfassen ist hier nicht notwendig, weil ja nur zur Vorzeichenkontrolle eingesetzt wird.

Extremwertbedingung: $F'(u_E) = 0$ d.h.

$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\left(1 - \frac{1}{2}u\right) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{2}u = 0 \;\Leftrightarrow\; u_E = 2$ (denn $e^{-\frac{1}{2}u} \neq 0$).

Kontrolle: $F''(2) = \underbrace{-\frac{1}{4} \cdot e^{-1} \cdot (1-1)}_{=0} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1} < 0$

Dieser Flächeninhalt stellt somit ein relatives Maximum dar.

Seine Größe ist $F_{max} = F(2) = e^{-1}$.

Bemerkung:

Wenn man zeigen soll, dass ein absolutes Maximum vorliegt, muss man die Randwertuntersuchung durchführen:

Für $u \to 0$ folgt $F(u) \to 0$. (Achtung: F(0) ist nicht definiert.)

Für $u \to \infty$ folgt $F(u) \to 0$. Im LK begründet man das mit der Regel von de l'Hospital, im GK wird man davon sprechen, dass im Produkt $x \cdot e^x$ für $x \to \infty$ der Exponentialanteil dominiert…..